Über die Theorie der Mittelwerte.

Von J. ACZÉL und ST. FENYŐ in Budapest.

Einleitung. Zu den meisten vorkommenden Mittelwerten (z. B. dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen Mittel, den Potenzmitteln; und auch zu ihren Gewichtsmitteln) kann man eine Funktion $f(x)$ und eine solche reelle Zahl p finden, daß

$$f[M(x, y)] = pf(x) + qf(y) \qquad (p + q = 1) \tag{1}$$

für jede $a \leqq x, y \leqq b$ stattfindet, für welche die Mittelwertfunktion $M(x, y)$ (im folgenden meistens Mittelwert, oder Mittel genannt) einen Sinn hat[1]). Mittelwerte solcher Natur werden *quasiarithmetische Mittel* genannt. Die Funktion $f(x)$ in (1) nennen wir (nach den ersten Verfassern, die Resultate dieser Art erhalten haben) die „Kolmogoroff-Nagumosche" oder kurz „K-N" Funktion[2]). Z. B. sind die K-N Funktionen der oben genannten Mittel der Reihe nach x, $\log x$, $\frac{1}{x}$, x^n. Aus (1) ersieht man ohne weiteres, daß mit $f(x)$ zugleich auch jede Funktion der Form $\alpha f(x) + \beta$ K-N Funktion des Mittels $M(x, y)$ ist. Ist $M(x, y)$ ein symmetrisches Mittel, so muß in (1) offenbar $p = q = \frac{1}{2}$, $f[M(x, y)] = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ sein.

Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Quasiarithmetizität eines Mittels $M(x, y)$ wurde für symmetrische Mittel zuerst von A. KOLMOGOROFF und M. NAGUMO[2]) beantwortet. Ihr Bedingungssystem enthält die Annahme, daß die Mittelwertfunktion für beliebig viele Veränderliche definiert ist. Für symmetrische *analytische* Mittelwertfunktionen einer bestimmten Anzahl von *komplexen* Veränder-

---

[1]) Es ist leicht zu sehen, wie die Gleichung (1) und alle folgenden Erörterungen auf Mittelwertfunktionen von n Veränderlichen übertragen werden können.

[2]) A. KOLMOGOROFF, Sur la notion de la moyenne, *Atti dei Lincei,* **12** (1930), S. 388—391; M. NAGUMO, Über eine Klasse der Mittelwerte, *Japanese Journal of Math.,* **7** (1930), S. 71—79.

lichen gab G. AUMANN[3]) ein Bedingungssystem der Quasiarithmetizität. Die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen ohne jede Annahme über die Differentierbarkeit wurde im Falle solcher symmetrischen Mittel, die nur für *eine bestimmte Anzahl* der Veränderlichen (z. B. nur für zwei Veränderliche) definiert sind, in der Dissertation von ST. FENYŐ (Budapest, 1945) aufgeworfen. Solche Bedingungen wurden für symmetrische und nicht-symmetrische Mittel von J. ACZÉL[4]) angegeben[5]).

Keine der genannten Arbeiten enthält aber eine explizite Darstellung der K-N Funktion durch $M(x,y)$.[6]) Ihre Existenz wurde vielmehr nur durch einen mehr oder minder verwickelten Konstruktionsprozeß bewiesen. Das Ziel der gegenwärtigen Abhandlung ist die Angabe solcher notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Quasiarithmetizität, welche zugleich die explizite Darstellung der K-N Funktion durch $M(x,y)$ enthüllen. Wir beweisen den

S a t z. *$M(x,y)$ ist dann und nur dann quasiarithmetisch, das heißt, es gibt dann und nur dann eine streng monotone und zweimal stetig differentierbare Funktion*[7]) *$f(x)$, die der Gleichung* (1) *genügt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

I. *$M(x,y)$ ist in beiden Variabeln streng monoton und besitzt stetige zweite partielle Ableitungen;*

II. *$M(t,t)=t$;*

III. *$M_1(t,t)=p$, konstant (das ist die in* (1) *vorkommende Zahl p);*

IV.[8]) $\dfrac{M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)\,M_2(x,y)}=\pi[M(x,y)]$ *(also eine Funktion von $M(x,y)$ allein).* (§. **1.**)

Bedingung IV *läßt sich durch* e i n e *der folgenden ersetzen*[9]):

[3]) G. AUMANN, Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, II (analytische Mittelwerte), *Math. Annalen,* **111** (1935), S. 713—730. Die Bedingungen und Rechnungen sind hier wesentlich mehr verwickelt, als in den übrigen zitierten Arbeiten.

[4]) J. ACZÉL, The notion of mean values, *Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger,* **19** (1946), S. 83—86 und J. ACZÉL, On mean values, *Bulletin of the American Math. Society,* im Erscheinen.

[5]) Bedingungssysteme etwas anderer Art wurden von B. DE FINETTI, Sul concetto di media, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuarii,* **2** (1931), S. 369—396, T. KITAGAWA, On some class of weighted means, *Proceedings Phys.-Math. Society of Japan,* **16** (1934), S. 117—126 und J. ACZÉL, Un problème de M. L. Fejér sur la construction de Leibniz, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris,* im Erscheinen, angegeben, indem sie nämlich Gewichtsmittel mit gegebenen Gewichten betrachteten.

[6]) Außer den in [5]) genannten Arbeiten von B. DE FINETTI und J. ACZÉL.

[7]) Den leicht zu erledigenden Fall, wo eine Ableitung von $f(x)$ oder eine partielle Ableitung von $M(x,y)$ identisch verschwindet, lassen wir im Folgenden außer Acht.

[8]) Wir bezeichnen: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x}=M_1(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 M(x,y)}{\partial x\partial y}=M_{12}(x,y)$ usw.

[9]) IV*a* enthält keine indirekte Funktion mehr; IV*b* zeigt, daß in I die Forderung der Existenz und Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen genügt.

IV*a*. $\frac{M_{11}(x,y)\,M_2(x,y) - M_1(x,y)\,M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)\,M_2(x,y)} = \varrho(x)$ (*eine Funktion von x allein*);

IV*b*. $\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\sigma(x)}{\tau(y)}$ (*die Veränderlichen x, y sind in ihr „getrennt"*).

Die explizite Form der K-N Funktion ist dementsprechend:

$$\text{(IV*)} \qquad f(x) = \int^x e^{-\int^z \pi(t)\,dt} dz = \int^x e^{-\frac{1}{pq}\int^z M_{12}(t,t)\,dt} dz,$$

bzw.

$$\text{(IV}a\text{*)} \qquad f(x) = \int^x e^{\int^z \varrho(t)\,dt} dz,$$

bzw.

$$\text{(IV}b\text{*)} \qquad f(x) = c\int^x \sigma(z)\,dz = k\int^x \tau(z)\,dz = \int^x \frac{M_1(u,v)}{M_2(u,v)}\,du$$

(*c, k, v sowie auch die unteren Grenzen der Integrale sind beliebige Konstanten*) (§. 2).

Den gewonnenen Satz wollen wir auch auf einen konkreten Fall anwenden (§. 3). Endlich (§. 4) weisen wir noch kurz darauf hin, daß diese Bedingungen im Wesentlichen mit denen der unter[4]) zitierten Arbeiten äquivalent sind.

§. 1. Wir beginnen mit der Notwendigkeit der Bedingungen, das heißt, mit dem Beweise, daß sie aus der Existenz einer streng monotonen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ folgen, die der Gleichung (1) genügt. Da man aus (1) $M(x,y) = f^{-1}[pf(x) + qf(y)]$ gewinnt, folgt aus ihr I und II unmittelbar. Derivieren wir (1) nach x bzw. nach y, so erhalten wir:

$$\text{(2)} \qquad f'[M(x,y)]\,M_1(x,y) = pf'(x),$$

$$\text{(3)} \qquad f'[M(x,y)]\,M_2(x,y) = qf'(y).$$

Setzen wir in beiden Gleichungen $x = y = t$, so bekommen wir $M_1(t,t) = p$, d. h. III, ferner die neue Gleichung

$$\text{(III')} \qquad M_2(t,t) = q = 1 - p.$$

Wird nun (2) weiter deriviert nach y, so erhalten wir:

$$f''[M(x,y)]\,M_1(x,y)\,M_2(x,y) + f'[M(x,y)]\,M_{12}(x,y) = 0,$$

$$\frac{M_{12}(x,y)}{M_1(x,y)\,M_2(x,y)} = -\frac{f''[M(x,y)]}{f'[M(x,y)]} = \pi(M)$$

und dies ist eben IV. Schreiben wir ferner in der letzten Gleichung $x = y = t$, so folgt aus II, III und (III')

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = -\pi(t) = -\frac{M_{12}(t,t)}{pq},$$

d. h.

$$\log f'(z) = -\int^{z} \pi(t)\,dt = -\frac{1}{pq}\int^{z} M_{12}(t,t)\,dt,$$

woraus unmittelbar

$$f(x) = \int^{x} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz = \int^{x} e^{-\frac{1}{pq}\int^{z} M_{12}(t,t)\,dt}\,dz,$$

also (IV*) folgt.

Wir bemerken noch, daß (III′) auch allein aus II und III abgeleitet werden kann: derivieren wir II nach t und setzen III in die erhaltene Gleichung $M_1(t,t)+M_2(t,t)=1$ ein, so erhalten wir (III′).

Nun wollen wir beweisen, daß die Bedingungen I—IV auch hinreichen, d. h. daß die Funktion (IV*) der Gleichung (1) genügt, falls die Bedingungen I—IV gültig sind.

Aus der in der Gestalt

$$M_{12}(x,y) - \pi(M)M_1(x,y)M_2(x,y) = 0$$

geschriebenen Gleichung IV folgt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,dt} M_1(x,y)\right] = e^{-\int^{M}\pi(t)\,dt}\,[M_{12}(x,y)-\pi(M)M_2(x,y)M_1(x,y)]=0,$$

das heißt, die in der ersten Klammer stehende Funktion $F(x,y)$ ist von y unabhängig, deshalb ist $F(x,y)=F(x,x)$, d. h., unter Anwendung von II und III:

$$e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,dt} M_1(x,y) = p e^{-\int^{x}\pi(t)\,dt},$$

oder

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\int^{M(x,y)} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz - p\int^{x} e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt}\,dz\right] =$$

$$= p e^{-\int^{z}\pi(t)\,dt} - e^{-\int^{M(x,y)}\pi(t)\,d} M_1(x,y) = 0;$$

also ist die in der Klammer stehende Funktion, die wegen IV nichts anderes, als $G(x,y)=f[M(x,y)]-pf(x)$ ist, von x unabhängig. Deshalb muß $G(x,y)=G(y,y)$ sein, d. h. $f[M(x,y)]-pf(x)=(1-p)f(y)=$ $=qf(y)$, w. z. b. w.

§. 2. Auch die Systeme I—II—III—IVa, bzw. I—II—III—IVb reichen hin und sind notwendig zur Quasiarithmetizität des Mittels $M(x,y)$. Vorderhand beweisen wir, daß die Bedingungen IVa und IVb mit einander äquivalent sind. Es folgt nämlich z. B. aus IVa

$$\varrho(x) = \frac{M_{11}(x,y)}{M_1(x,y)} - \frac{M_{12}(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}[\log M_1(x,y) - \log M_2(x,y)].$$

Integrieren wir nach x, so erhalten wir

$$\log \frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \log \sigma(x) - \log \tau(y),$$

also eben IVb. Hier ist $\sigma(x) = e^{\int^x \varrho(z)\,dz}$, $\tau(y)$ eine beliebige (positive) Funktion von y, also ist auch (IVa^*) mit (IVb^*) äquivalent. Dieser Beweisgang läßt sich offenbar umkehren; deshalb sind IVa und IVb äquivalent. Im Folgenden wollen wir uns nur mit IVb beschäftigen. [Wir bemerken noch, daß IV (resp. IVa, IVb) durch zahlreiche andere ähnliche Bedingungen ersetzt werden kann. Z. B. durch

$$M_{11}(M, M) M_1(x, y) + pq \frac{M_{11}(x, y)}{M_1(x, y)} = \varphi(x)$$

(von y unabhängig); oder durch

$$\frac{M_1[M(x, y), z]}{M_2[M(x, y), z]} M_2(x, y) = \psi(y, z)$$

(von x unabhängig). Die Beweise verlaufen auch in diesen Fällen ganz ähnlich.]

Die Notwendigkeit der Bedigung IVb (also auch von IVa) folgt durch Division der beiden aus (1) erhaltenen Gleichungen (2) und (3). Dies ergibt nämlich

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{pf'(x)}{qf'(y)}$$

und das ist eben IVb mit $\sigma(x) = pf'(x)$, $\tau(y) = qf'(y)$. Zugleich gewinnt man auch (IVb^*) (wir setzen $f(y) = k$; eine multiplikative Konstante darf der K-N Funktion immer beigefügt werden; vgl. Einleitung).

Umgekehrt sind die Bedingungen I—IVb (also auch I—IVa) auch hinreichend, d. h. die Gleichung (1) folgt aus ihnen und aus (IVb^*) [bzw. (IVa^*)]. Da, wie wir in §. 1 sahen, (III') eine unmittelbare Folge von II und III ist, bekommen wir aus IV, falls wir $x = y = t$ einsetzen und III, (III') beachten,

$$\frac{\sigma(t)}{\tau(t)} = \frac{M_1(t, t)}{M_2(t, t)} = \frac{p}{q}, \qquad \tau(t) = \frac{q}{p}\sigma(t),$$

und so nimmt IVb die Gestalt

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = \frac{p\sigma(x)}{q\sigma(y)}$$

an. Daher ist

$$p\sigma(x) M_2(x, y) - q\sigma(y) M_1(x, y) = 0$$

oder, $g(x, y) = pc\int^x \sigma(z)\,dz + qc\int^y \sigma(z)\,dz$ gesetzt,

$$\begin{vmatrix} g_1(x,y) & g_2(x,y) \\ M_1(x,y) & M_2(x,y) \end{vmatrix} = g_1(x,y)M_2(x,y) - g_2(x,y)M_1(x,y) = 0.$$

Es ist bekannt, daß dies eben die Existenz einer Funktion $w(t)$ bedeutet, für die [wegen (IVb^*)]

$$w[M(x,y)] = g(x,y) = pc\int^x \sigma(z)\,dz + qc\int^y \sigma(z)\,dz = pf(x) + qf(y)$$

gilt. Setzen wir $x = y = t$, so folgt wegen II $w(t) = f(t)$ und

$$f[M(x,y)] = pf(x) + qf(y), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

§. 3. Die Brauchbarkeit der gewonnenen Ergebnisse möchten wir an einem ganz einfachen Beispiel zeigen. Ist

$$M(x,y) = \frac{\sqrt{(1+x)(1+y)} - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{2}$$

ein quasiarithmetisches Mittel? Und falls ja, wie lautet dann seine K-N Funktion? Die Bedingungen I und II sind offensichtlich erfüllt. Bilden wir nun die ersten partiellen Ableitungen:

$$M_1(x,y) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1+y}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right) = \frac{\sqrt{(1-x)(1+y)} + \sqrt{(1+x)(1-y)}}{4\sqrt{1-x^2}},$$

$$M_2(x,y) = \frac{\sqrt{(1-y)(1+x)} + \sqrt{(1+y)(1-x)}}{4\sqrt{1-y^2}}.$$

Es ist $M_1(t,t) = M_2(t,t) = \dfrac{2\sqrt{1-t^2}}{4\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{2}$, also ist auch III erfüllt. (Wegen der Symmetrie $M(x,y) = M(y,x)$ dieses Mittels muß $p = q = \dfrac{1}{2}$ sein; vgl. Einleitung.) Prüfen wir nach, ob $M(x,y)$ z. B. der Bedingung IVb genügt! Es ist

$$\frac{M_1(x,y)}{M_2(x,y)} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}},$$

also gilt IVb und zwar mit $\sigma(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$. Also ist wegen (IV$b^*$)

$$f(x) = c\int^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -c\,\arccos x + \beta = \alpha\,\arccos x + \beta$$

die K-N Funktion. Daher ist

$$\frac{\sqrt{(1+x)(1+y)} - \sqrt{(1-x)(1-y)}}{2} = M(x,y) =$$

$$= f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\arccos x + \arccos y}{2}\right),$$

was leicht zu verifizieren ist.

§. 4. Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß unser Bedingungssystem mit dem der unter [4]) zitierten Arbeiten übereinstimmt, indem es nur mit der Forderung der Differenzierbarkeit verschärft wurde. Das fragliche Bedingungssystem von J. ACZÉL lautet: (*i*) $M(x, y)$ ist stetig und wachsend; (*ii*) $M(t, t) = t$; (*iii*) $M[M(x, u), M(y, v)] = M[M(x, y), M(u, v)]$ („Bisymmetrie"). Augensichtlich muß nur die Äquivalenz von (*iii*) mit III und IV (resp. IV *a*, IV *b*) bewiesen werden.

Derivieren wir (*iii*) nach x:

$$M_1[M(x, u), M(y, v)]\, M_1(x, u) = M_1[M(x, y), M(u, v)]\, M_1(x, y) \tag{4}$$

bzw. nach y:

$$M_1[M(x, u), M(y, v)]\, M_1(y, v) = M_1[M(x, y), M(u, v)]\, M_2(x, y),$$

$$\left.\begin{matrix} x = u = s \\ y = v = t \end{matrix}\right\} \text{ gesetzt folgt } \left\{\begin{matrix} M_1(s, s) = M_1[M(s, t), M(s, t)] \\ M_1(t, t) \;= M_1[M(s, t), M(s, t)]; \end{matrix}\right.$$

daher ist

$$M_1(s, s) = M_1(t, t) = p \text{ (konstant).} \tag{III}$$

Derivieren wir (4) weiter nach v und schreiben wir wieder $x = u = s$, $y = v = t$, so wird

$$M_{12}[M(s, t), M(s, t)]\, M_1(s, t)\, M_2(s, t) = pq M_{12}(s, t);$$

$$\frac{M_{12}(x, y)}{M_1(x, y)\, M_2(x, y)} = \pi(M), \tag{IV}$$

w. z. b. w. Ähnlicherweise lassen sich IV *a* und IV *b* aus (*iii*) ableiten.

(Eingegangen am 15. Januar 1948.)